

# חדוֹא להתלמידי כלכלה וניהול

## פרק 33 - סדרות

### תוכן העניינים

1.	היכרות עם סדרות .....
1	..... חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות .....
3	..... חישוב גבול לפי אוילר .....
4	..... חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ .....
6	..... חישוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש .....
7	..... חישוב גבול של סדרה רקורסיבית .....
9	..... חישוב גבול לפי ההגדרה .....

## чисוב גבול לפי כללי חישוב גבולות

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt[3]{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2 + 4n + 1} \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (21)$$

$$\cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

**הערה חשובה מאוד!**

בפתרון המלא, יופיע במקומות המשתנה  $n$  – המשתנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי!  
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים למספריים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

### תשובות סופיות

$$4 \quad (2) \qquad 0 \quad (1)$$

$$0 \quad (4) \qquad \infty \quad (3)$$

$$1 \quad (6) \qquad -5 \quad (5)$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \quad (8) \qquad 1.5 \quad (7)$$

$$4 \quad (10) \qquad 0.25 \quad (9)$$

$$\ln 3 \quad (12) \qquad 2 \quad (11)$$

$$e^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

$$, \left( \lim a_n = \infty \right) \Leftarrow \left( a > 0, b = 0 \right) , \left( \lim a_n = \sqrt[5]{a/b} \right) \Leftarrow \left( b \neq 0 \right) \quad (14)$$

$$\left( \lim a_n = -\infty \right) \Leftarrow \left( a < 0, b = 0 \right)$$

$$\frac{k}{2} \quad (16) \qquad 2.5 \quad (15)$$

$$0.5 \quad (18) \qquad 0.5 \quad (17)$$

$$0.5 \quad (20) \qquad \frac{a-b}{2} \quad (19)$$

$$1 \quad (22) \qquad \frac{1}{3} \quad (21)$$

## чисוב גבול לפי אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

1 (2)

$e^{0.5}$  (1)

$e^{-1}$  (4)

$e^2$  (3)

$e^{-12}$  (6)

$e^3$  (5)

$e^{30}$  (7)

## чисוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-5 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^{\frac{4n+1}{n}}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (5)$$

$$\text{רמז לשאלה 4: הוכיחו כי } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

6) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל- 0 :

$$\begin{aligned} a_n &= \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \cdots \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right) \\ &\text{א. } \alpha \in (0,1), a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha \end{aligned}$$

7) יהיו  $x$  מספר ממשי וחיוובי.

$$a_n = \frac{6n + \sqrt{x^2 n^2}}{3n + \sqrt{2}}$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$$

$$8) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

**תשובות סופיות**

- |                |  |
|----------------|--|
| 4 (1)          |  |
| 0 (2)          |  |
| 1 (3)          |  |
| 0 (4)          |  |
| 1 (5)          |  |
| 6) שאלת הוכחה. |  |
| 7) שאלת הוכחה. |  |
| 9 (8)          |  |

## чисוב גבול לפי מבחן המנה ו מבחן השורש

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

0 (2)

0 (1)

$\frac{1}{4e}$  (4)

4 (3)

$\infty$  (5)

## чисוב גבול של סדרה רקורסיבית

### שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3)$$

(4) יהי  $a > 0, x_1 > 0$ .

נגידר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , לכל  $n$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל-  $\sqrt{a}$ .

(5) יהי  $x_1 = a \geq 0$ .

נגידר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{5} \left( x_n^2 + 6 \right)$ , לכל  $n$ .

- א. מצאו את כל הערכים של הקבוע  $a$ , עבורם הסדרה עולה/ יורדת.
- ב. קבעו האם הסדרה  $x_n$  מתכנסת עבור  $3 < a < 3.5$ .

(6) יהיו  $0 < b_1 < a_1$ .

נגידר  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ , לכל  $n$ .

הוכיחו שהסדרות  $a_n$  ו-  $b_n$  מתכנסות ומתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

7) נתונה הסדרה  $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .

א.1. נגידר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

הניחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיימים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים.  
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$  קיימים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

### תשובות סופיות

1) הגבול 2.

2) הגבול 1.

3) הגבול 1.

4) הגבול הוא  $\sqrt{a}$ .

5) א. אם  $2 \leq a \leq 3$  הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.

ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1.  $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

## чисוב גבול לפי ההגדרה

### שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכחו כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n+5) = \infty \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 4n} - n \right) = 2 \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)